Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό θεώρημα-απόδειξη σελίδας 76

Α2. Σχολικό ορισμός σελίδας 94

Α3. **(α)** Λάθος, **(β)** Λάθος, **(γ)** Λάθος, **(δ)** Λάθος, **(ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ θα είναι:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+5h)-f(x-h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+5h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)=\\ &=\lim_{h\to 0}\left(5\frac{f(x+5h)-f(x)}{5h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right)=\\ &=5\lim_{\omega\to 0}\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}+\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\rho)-f(x)}{\rho}=\\ &=5f'(x)+f'(x)=6f'(x)\end{aligned}$$

Άρα $6f'(x_0)=-24x_0e^{f(x_0)}$

Τότε $6f'(x)=-24xe^{f(x)} \Rightarrow -f'(x)e^{-f(x)}=4x \Rightarrow \left(e^{-f(x)}\right)'=\left(2x^2\right)'$

Άρα $e^{-f(x)}=2x^2+c$.

Για $x=0$ θα είναι $e^{-f(0)}=0+c \Leftrightarrow e^0=c \Leftrightarrow c=1$.

Τελικά $e^{-f(x)}=2x^2+1 \Leftrightarrow -f(x)=\ln\left(2x^2+1\right) \Leftrightarrow f(x)=-\ln\left(2x^2+1\right)$.

Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

Β2.

$$\varepsilon:\ y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-\ln 3=-\frac{4}{3}(x-1) \Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+\ln 3+\frac{4}{3}$$

Β3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)=-\dfrac{4x}{2x^2+1}$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{4x}{2x^2+1}>0 \Leftrightarrow x<0$$

Έτσι είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=0$ τη τιμή $f(0)=0$.

Β4. $f''(x)=-\dfrac{4(2x^2+1)-4x\,4x}{(2x^2+1)^2}=\dfrac{4(2x^2-1)}{(2x^2+1)^2}$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{4(2x^2-1)}{(2x^2+1)^2}>0 \Leftrightarrow 2x^2-1>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2>\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x<-\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ ή } x>\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Έτσι είναι κυρτή στα $\left(-\infty,-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right],\ \left[\sqrt{\tfrac{1}{2}},+\infty\right)$ και κοίλη στο $\left[-\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right]$.

Παρουσιάζει σημεία καμπής για $x_1=-\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $x_2=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

\- - - - - - - -

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $g(x)=\dfrac{F(x)-3x}{x}$ με x κοντά στο 0. Τότε $F(x)=x\,g(x)+3x$

Η F είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη: $F(0)=\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\,g(x)+3x\right)=0+0=0$.

Άρα το (0,0) ανήκει στη γραφικήπαράσταση της F.

Γ2.: Η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $\varepsilon:\ y-F(0)=F'(0)(x-0)$ (1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,g(x)+3x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)+3\right)=5=F'(0)$$

Από (1) είναι $\varepsilon:\ y-0=5(x-0) \Leftrightarrow y=5x$

Γ3. Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x)=F(x)-x+6$ $x\in[0,9]$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον $x_0\in(0,9)$ ώστε $\varphi(x_0)=0 \Leftrightarrow F(x_0)=x_0-6$.

Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

Έτσι η ευθεία με εξίσωση $y = x - 6$ τέμνει την C_F σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,9)$.

Γ4. Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle στη F στο $[0,9]$. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,9)$ έτσι ώστε $F'(\xi) = 0$. Η F ως κυρτή έχει F' γνησίως αύξουσα.

Για $x < \xi$ είναι $F'(x) < F'(\xi) \Leftrightarrow F'(x) < 0$ F γν.φθίνουσα στο $[0,\xi]$

Για $x > \xi$ είναι $F'(x) > F'(\xi) \Leftrightarrow F'(x) > 0$ F γν.αύξουσα στο $[\xi,9]$

Άρα η F παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \xi$ που είναι μοναδικό.

– – – – – – –

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. φ συνεχής ως άθροισμα συνεχών με $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$. Άρα φ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης $\varphi''(x) = e^x > 0$ δηλαδή η φ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Δ2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \ldots = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \ldots = -\infty$

Έτσι το σύνολο τιμών είναι $\varphi(\mathbb{R}) \overset{\varphi\,\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi}{=} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x), \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) \right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

$0 \in \varphi(\mathbb{R})$ και φ γν.αύξουσα Έτσι υπάρχει μοναδικό x_0 ώστε $\varphi(x_0) = 0$

Δ3. g συνεχής στο $(-\infty,5)$ ως σύνθεση συνεχών με $g'(x) = -\dfrac{1}{5-x} < 0$. Άρα g γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,5)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \ldots = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x) = \ldots = -\infty$

Δ4. Από το Δ2 έχουμε

$$\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = 5 - x_0 \quad x_0 < 5$$
$$\Leftrightarrow x_0 = \ln(5 - x_0) \Leftrightarrow x_0 = g(x_0)$$

Δ5. Η εφαπτομένη είναι

$$\varepsilon: y - \varphi(\ln\alpha) = \varphi'(\ln\alpha)(x - \ln\alpha) \Leftrightarrow y - (\alpha + \ln\alpha - 5) = (\alpha+1)(x - \ln\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = (\alpha+1)(x - \ln\alpha) + (\alpha + \ln\alpha - 5)$$

Δ6. Από το Δ1 η φ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Τότε C_φ "πάνω" από την εφαπτομένη ε. Δηλαδή

$$e^x + x - 5 \ge (\alpha+1)(x - \ln\alpha) + (\alpha + \ln\alpha - 5)$$
$$e^x + x \ge (\alpha+1)(x - \ln\alpha) + (\alpha + \ln\alpha)$$

– – – – – – –

Επιμέλεια : Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
Μαθηματικός