# ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
# ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία σελίδα 135

**Α2.** Θεωρία σελίδα 51

**Α3.** Θεωρία σελίδα 23

**Α4.** α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.**

Θέτουμε $w = x+1,\ w \in \mathbb{R}$. Τότε $x = w-1$. Έτσι
$f(x+1) = (x+1)e^{-x} \Leftrightarrow f(w) = w\,e^{1-w}$ Δηλαδή $f(x) = x\,e^{1-x},\ x \in \mathbb{R}$

**Β2.**

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^{1-x} - x\,e^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$

Έτσι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$

| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f' | + | 0 | - |
| f | ↗ | | ↘ |

Άρα f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και είναι γν. φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο τη τιμή $f(1) = 1$.

**Β3.**

Η $f'$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f''(x) = e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = e^{1-x}(x-2)$

Έτσι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ και

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$

| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'' | - | 0 | + |
| f | ∩ | | ∪ |

Άρα f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$ και είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$. Παρουσιάζει σημείο καμπής το $A\left(2,\frac{2}{e}\right)$.

Η $f$ είναι συνεχής στο $R$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}=+\infty$$ Άρα δεν έχει πλάγια-οριζόντια στο $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xe^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$$

Άρα έχει πλάγια-οριζόντια στο $+\infty$ την ευθεία $y=0$ $(x'x)$

**B4.**

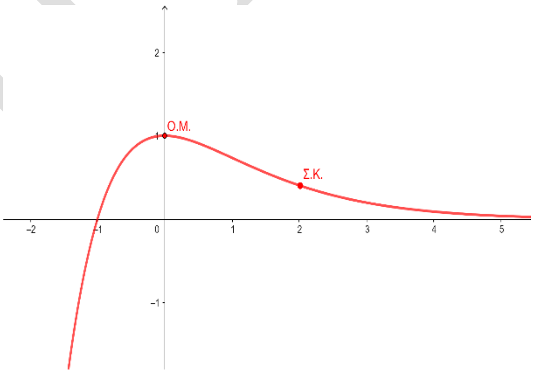
**(i)** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{1-x}=-\infty$

$$f\big((-\infty,1]\big)\overset{f\uparrow}{=}\Big(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(1)\Big]=(-\infty,1] \qquad \text{και} \qquad f\big([1,+\infty)\big)\overset{f\downarrow}{=}\Big(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(1)\Big]=(0,1]$$

Έτσι το σύνολο τιμών είναι $f(\mathbb{R})=f\big((-\infty,1]\big)\cup f\big([1,+\infty)\big)=(-\infty,1]$

**(ii)** Διακρίνουμε περιπτώσεις συμφώνως των τιμών του λ, των επιμέρους συνόλων τιμών και της μονοτονίας που ξέρουμε:

- Αν $\lambda\le 0$ τότε $f(x)=\lambda \Leftrightarrow x=x_1$
- Αν $0<\lambda<1$ τότε $f(x)=\lambda \Leftrightarrow \begin{cases}x=x_2\\ x=x_3\end{cases}$
- Αν $\lambda=1$ τότε $f(x)=1 \Leftrightarrow x=1$
- Αν $\lambda>1$ τότε $f(x)=\lambda$ αδύνατη




*Προαιρετικό το σχήμα*

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**

- $f$ συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική

  $f$ συνεχής στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ ως βασική τριγωνομετρική

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1\\&\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\sigma\upsilon\nu x=1\\&f(0)=1\end{aligned}\right\}\text{Άρα } f \text{ συνεχής στο } 0$$

Έτσι <u>$f$ είναι συνεχής</u> στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha x^2-3x-1\right)=1$

  $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

  Έτσι <u>δεν παραγωγίζεται</u> στο 0.

**Γ2.**

**(i)** Η $f$ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

αλλά είναι $f(0)=1\neq -1=f(\frac{3\pi}{2})$.

Επομένως <u>δεν ικανοποιούνται</u> οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

**(ii)** Είναι $\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi=0 \Leftrightarrow \xi=\pi$

**Γ3.**

$x<0$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2-6x-1=0$ (1)

Είναι $3\alpha<-9<0$ και $\Delta=36+12\alpha=12(3+\alpha)<0$ $(\alpha\varphi o\upsilon\ \ \alpha<-3)$

Έτσι η εξίσωση (1) είναι Αδύνατη. Άρα δεν υπάρχουν σημεία αρνητικής τετμημένης με εφαπτομένη παράλληλη στον x'x.

Επίσης ισχύει $x\leq 0$ $f'(x)<0$ (2)

**Γ4.**

Από (2) είναι $x\in(-\infty,0]$ $f'(x)<0$. Άρα $f$ γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

Τότε $x\leq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow f(x)\geq 1>-1$

Επίσης $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ $\sigma\upsilon\nu x\geq -1 \Leftrightarrow f(x)\geq -1$

Άρα $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**

Έστω $g(x) = x\ln x - 1 \quad x \in [1, e]$

- $g$ συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(1)g(e) = -1(e-1) < 0$

Από Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 = \dfrac{1}{x_0}$

Επίσης $g'(x) = \ln x + 1 > 0 \quad x \in [1, e]$. Αρα $g$ γν. αύξουσα (1-1) στο $[1, e]$.

Επομένως $x_0$ μοναδική λύση.

**Δ2.**

$$f(x) = \ln x_0 (x+1) - \ln x - 1 = \frac{x+1}{x_0} - \ln x - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x x_0}$$

Αν $0 < x < x_0$ $f'(x) < 0$ και αν $x > x_0$ $f'(x) > 0$

Ετσι η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = x_0$. $f(x_0) = \dfrac{x_0 + 1}{x_0} - \ln x_0 - 1 = 1 + \dfrac{1}{x_0} - \ln x_0 - 1 = 0$

**Δ3.**

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln(xe^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln x_0 - x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0 - \ln x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Από Δ2 είναι $f(x) \geq f(x_0) = 0$ με την ισότητα στο $x = x_0$ (μοναδικό ελάχιστο)

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = \frac{1-x}{e^x}, \quad h'(x) = \frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}}(\ln x_0 - 1) =$$

$$= \frac{{x_0}^{x+1}}{e^{x+1}} \cdot \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) = \frac{{x_0}^{x+1}}{e^{x+1}} \cdot \frac{1-x_0}{x_0} = \frac{x_0^x \cdot (1-x_0)}{e^{x+1}}$$

Επίσης πρέπει

$$h'(\mathrm{x_o}) = \mathrm{g}'(\mathrm{x_o}) \Rightarrow \frac{1-\mathrm{x_o}}{e^{\mathrm{x_o}}} = \frac{\mathrm{x_o}^{\mathrm{x_o}}(1-\mathrm{x_o})}{e^{\mathrm{x_o}+e}} \Rightarrow \mathrm{x_o}^{\mathrm{x_o}} = e \Rightarrow$$

$$\ln \mathrm{x_o}^{\mathrm{x_o}} = \ln e \Rightarrow \mathrm{x_o} \cdot \ln \mathrm{x_o} = 1 \Rightarrow \ln \mathrm{x_o} = \frac{1}{\mathrm{x_o}}.$$

Ισχύει από το Δ1.

**Δ4.**

f(x) > φ(x), $x > 0$ d(x)= f(x)-φ(x)

Ελάχιστη στο $x_o$, άρα

$$d(x) \geq d(x_o) \Rightarrow f(x)-φ(x) \geq f(x_o)-φ(x_o) \Rightarrow f(x)-f(x_o) \geq φ(x)-φ(x_o), \quad x > 0$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o$ <u>τότε το $x_o$ είναι κρίσιμο σημείο</u>.
- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o$.

*1ος τρόπος:*

Τότε η d(x) είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ με $d'(x_0) = f'(x_0) - φ'(x_0) = -φ'(x_0)$ και $d(x) \geq d(x_0)$ για κάθε x δηλαδή παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0$.

Από το θεώρημα του Fermat θα είναι $d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -φ'(x_0) = 0 \Leftrightarrow φ'(x_0) = 0$

Αρα <u>το $x_o$ είναι κρίσιμο σημείο.</u>

*2ος τρόπος:*

Είναι $f(x) - f(x_0) \geq φ(x) - φ(x_0)$ x>0

Για x>$x_o$, $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \geq \dfrac{φ(x)-φ(x_o)}{x-x_o} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \geq \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{φ(x)-φ(x_o)}{x-x_o} \Rightarrow$

$f'(x_o) \geq φ'(x_o) \Rightarrow φ'(x_o) \leq 0$ (1)

Για 0<x<$x_o$, $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \leq \dfrac{φ(x)-φ(x_o)}{x-x_o} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \leq \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{φ(x)-φ(x_o)}{x-x_o} \Rightarrow$

$f'(x_o) \leq φ'(x_o) \Rightarrow φ'(x_o) \geq 0$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $φ'(x_o) = 0$. Άρα <u>το $x_o$ είναι κρίσιμο σημείο</u>.

- - - - -

**ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ**

**ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑΣ**