**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Θεωρία σελίδα 135

**Α2**. Θεωρία σελίδα 51

**Α3**. Θεωρία σελίδα 23

**Α4**. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** Θέτω  άρα η  γίνεται  άρα 

**Β2.** Η f είναι συνεχής στο R και παραγωγίσιμη με 

για κάθε  



Η f είναι  στο  και  στο , και έχει ολικό max το f(1)=1

**B3.** H f ΄ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με 





Η f είναι κοίλη στο  και κυρτή στο , και έχει σημείο καμπής το

 . H f ορίζεται στο R και είναι συνεχής άρα η Cf δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.



 άρα η Cf δεν έχει πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στο 





άρα η y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο 

**Β4.** i) 

 

Σύνολο τιμών 

ii) Aν  τότε η f(x)=λ έχει μία ρίζα γιατί $λεf\left(-\infty ,1\right] $άρα 1 λύση μοναδική λόγω μονοτονίας

 Αν 0<λ<1 τότε η f(x)=λ έχει δύο ρίζες λεf(-∞,1] 1μοναδική λύση λόγω μονοτονίας

 Αν λ=1 τότε η f(x)=λ έχει μία ρίζα την x=1 λεf[1,+∞) 1 λύση λόγω μονοτονίας

Aν λ>1 τότε η f(x)=λ δεν έχει ρίζες

**ΘΕΜΑ Γ**



1. Η  είναι συνεχής στο  ως πολυωνυμική

Η  είναι συνεχής στο  ως βασική τριγωνομετρική



άρα η f είναι συνεχής και στο 0.

Άρα η f είναι συνεχής στο 





άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

1. i) Η f είναι συνεχής στο και παραγωγίσιμη στο  με 



 άρα δεν ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο .

ii) αφού 

άρα υπάρχει μοναδικό  τέτοιο ώστε 







και αφού 

Ισχύει  για κάθε 

Άρα δεν υπάρχουν σημεία της Cf με αρνητική τετμημένη, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον  .

1. 1ος τρόπος



η f είναι συνεχής στο 0 

Άρα έχει ολικό ελάχιστο το 

άρα για κάθε  ισχύει 

2ος τρόπος

Για 

 για 

Για  που ισχύει

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

Έστω 

* g συνεχής στο  ως πράξεις συνεχών
* 

 Από Θ.Bolzano υπάρχει τουλ. 

. Αρα g γν. αύξουσα στο .

Επομένως  μοναδική λύση.

**Δ2.**





Αν  και αν 

Ετσι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο . 

**Δ3.**



 Από Δ2  με την ισότητα στο  (ελαχ) μοναδικο

 =

 $=\frac{x\_{o}^{x+1}}{e^{x+1}}∙\left(\frac{1}{x\_{o}}-1\right)=\frac{x\_{o}^{x+1}}{e^{x+1}}.\frac{1- x\_{o}}{x\_{o}}=\frac{x\_{o}^{x}∙(1-x\_{o})}{e^{x+1}}$

Πρέπει

 $h^{'}\left(x\_{o}\right)=g^{'}\left(x\_{o}\right)⇒\frac{1-x\_{o}}{e^{Xo}}=\frac{x\_{o}^{x\_{o}}(1-x\_{o})}{e^{x\_{o}+e}}⇒x\_{o}^{x\_{o}}=e⇒lnx\_{o}^{x\_{o}}=lne⇒x\_{o}∙lnx\_{o}=1⇒lnx\_{o}=\frac{1}{x\_{o}}$.

Ισχύει από το Δ1.

**Δ4.**

f(x)>φ(x), $∀x>0$ d(x)= f(x)-φ(x)

Ελάχιστη στο $x\_{o}$, άρα d(x)$\geq $d($x\_{o}$)$ ⇒$f(x)-φ(x) $\geq $ f($x\_{o}$)-φ($x\_{o}$) $⇒$ f(x)-φ(x) $\geq $ -φ($x\_{o}$) , $∀x>0$

* Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x\_{o}$ τότε το $x\_{o}$ είναι κρίσιμο σημείο.
* Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x\_{o} $ f(x)$ \geq $φ(x)-φ($x\_{o}$)

Για x>$x\_{o}, $ $\frac{f\left(x\right)-f(x\_{o}) }{x-x\_{o}}$ $\geq $ $\frac{φ\left(x\right)-φ(x\_{o}) }{x-x\_{o}}$ $⇒$ $\lim\_{x\to x\_{0}^{+}}\frac{f\left(x\right)-f(x\_{o}) }{x-x\_{o}}\geq \lim\_{x\to 0^{-}}\frac{φ\left(x\right)-φ\left(x\_{o}\right) }{x-x\_{o}}⇒ f^{'}\left(x\_{o}\right)\geq φ΄\left(x\_{o}\right)⇒φ΄\left(x\_{o}\right)\leq 0$ (1)

Για x<$x\_{o}, $ $\frac{f\left(x\right)-f(x\_{o}) }{x-x\_{o}}$ $\leq $ $\frac{φ\left(x\right)-φ(x\_{o}) }{x-x\_{o}}$ $⇒$ $\lim\_{x\to x\_{0}^{-}}\frac{f\left(x\right)-f(x\_{o}) }{x-x\_{o}}\leq \lim\_{x\to x\_{0}^{-}}\frac{φ\left(x\right)-φ\left(x\_{o}\right) }{x-x\_{o}}⇒ f^{'}\left(x\_{o}\right)\leq φ΄\left(x\_{o}\right)⇒φ΄\left(x\_{o}\right)\geq 0$ (2)

(1),(2) $⇒$ $φ΄\left(x\_{o}\right)=0$ , το $x\_{o}$ είναι κρίσιμο σημείο.

- - - - -

**ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ**

**ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑΣ**