ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

(12 00)

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) §1.2 σελ 15

β) §1.3 σελ 35

Α2. §2.7 σελ 142

Α3. § 2.6 σελ 135

Α4. α) ΛΑΘΟΣ θεώρημα σελ 133 παράδειγμα σελ 134

β) ΛΑΘΟΣ διότι μπορεί η f να μην είναι συνεχής, παράδειγμα σελ 71

Α5. γ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θα πρέπει $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to\infty}(e^{-x}+\lambda)=2 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}+\lim\limits_{x\to\infty}\lambda=2 \Rightarrow$

$0+\lambda=2 \Rightarrow \lambda=2$

Άρα $f(x)=e^{-x}+2$

B2.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξη συνεχών.

Έστω $g(x) = f(x) - x$

Η g συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξη συνεχών.

$g(2) = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} > 0$

$g(3) = e^{-3} + 2 - 3 = \dfrac{1}{e^3} - 1 < 0$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον

ένα $x_0 \in (2,3)$: $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$

$g'(x) = f'(x) - 1 = -e^{-x} - 1 < 0$

η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε η λύση

είναι μοναδική.

B3.

$f'(x) = -e^{-x} < 0$, η f είναι γν.φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

οπότε είναι 1-1, και ορίζε ται η αντίστροφή της.

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γν.φθίνουσα άρα

$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)) = (2,+\infty)$

Άρα $A_{f^{-1}} = (2,+\infty)$

Θέτω $f(x)=y \Rightarrow y=e^{-x}+2 \Rightarrow e^{-x} = y-2 \Rightarrow$

$-x = \ln(y-2) \Rightarrow x = -\ln(y-2)$

Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x>2$

*B*4.

$f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$

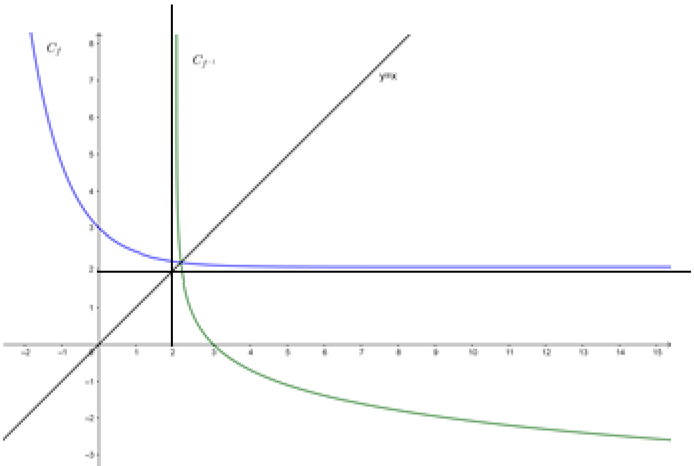
$\lim_{x\to2^+}(-\ln(x-2))$

θέτω $u = x-2$

άρα $x \to 2^+$ άρα $u \to 0^+$

οπότε $\lim_{u\to0^+}(-\ln(u)) = -(-\infty) = +\infty$

άρα η $x = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. f συνεχής στο x=1, ως παραγωγίσιμη

· $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow$

$1+a = 1+\beta = f(1) \Rightarrow$

$a = \beta$ (1)

· f παραγωγίσιμη στο χ=1, άρα

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

· $$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-(1+a)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-(1+\beta)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1} \overset{0/0}{\underset{DLH}{=}}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1} = 1+\beta$$

οπότε $\beta+1 = 2 \Rightarrow \beta = 1$

$(1) \Rightarrow \alpha = 1$

Γ2.

Η f συνεχής ως παραγωγίσιμη.

$$f'(x)=\begin{cases}2x, x\geq 1\\ e^{x-1}+1, x<1\end{cases}$$

Στο $[1,+\infty)$ η f συνεχής και f'(x)>0 άρα η f γν.αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Στο $(-\infty,1)$ η f συνεχής και f'(x)>0 άρα η f γν.αύξουσα στο $(-\infty,1)$.

Η f συνεχής στο x=1 άρα η f γν.αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f συνεχής και γν.αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα

$f(\mathbb{R})=(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x-1}\overset{u=x-1}{\underset{u\to-\infty}{=}}\lim_{u\to-\infty}e^u=0$$

οπότε $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

Γ3. i) Το $0\in f(R)$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση (x_0), η οποία είναι μοναδική λόγω μονοτονίας

Έχουμε $f(0)=e^{-1}>0$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,0]$, άρα

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right]=\left(-\infty,e^{-1}\right]$, οπότε $0\in f(A_1)$ δηλαδή η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ ανήκει στο $(-\infty,0)$ επομένως η ρίζα είναι αρνητική.

ii) Έστω ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_0\cdot f(x)=0$ έχει ρίζα την $\xi\in(x_0,+\infty)$. Έχουμε ότι

$f(\xi)\cdot(f(\xi)-x_0)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=0$ ή $f(\xi)-x_0=0$

Αν $f(\xi)=0$ Άτοπο γιατί, $\xi\in(x_0,+\infty)$ και x_0 μοναδική ρίζα.

Αν $f(\xi)-x_0=0\Leftrightarrow f(\xi)=x_0$ έχουμε:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0,+\infty)$ και συνεχής με

$$f\left((x_0,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to x_0} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left(f(x_0),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,+\infty).$$

Όμως $x_0\notin(0,+\infty)$ αφού $x_0\in(-1,0)$ οπότε η εξίσωση δεν έχει ρίζα.

Γ4.

$x(t_0)=3$

$x'(t_0)=2$

$$(MOK)=\frac{1}{2}\cdot OK\cdot MK=\frac{1}{2}\cdot x\cdot f(x)=\frac{1}{2}x(x^2+1)=\frac{x^3+x}{2}$$

$$E(t)=\frac{x^3(t)+x(t)}{2}$$

$$E'(t)=\frac{3x^2(t)\cdot x'(t)+x'(t)}{2}$$

$$E'(t_0)=\frac{3x^2(t_0)\cdot x'(t_0)+x'(t_0)}{2}=28 \text{ τμ/s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$y=-x+2$ εφάπτεται της C_f στο $A(1,1)$ άρα

$f(1)=-1+2\Rightarrow a+\beta=1 \quad (1)$

$f'(1)=-1$

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{(x-1)\cdot(2x-2)}{x^2-2x+2}+a$$

$\cdot\ f'(1)=-1\Rightarrow \ln 1+0+a=-1\Rightarrow a=-1$

$(1)\Rightarrow \beta=2$

Δ2.

$f(x)=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)-x+2$

$h(x)=f(x)-(-x+2)=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)$

$=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)$

· Στο $[1, 2]$, $\chi\geq 1\Rightarrow \chi-1\geq 0$

· $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1$ άρα $\ln x^2-2x+2\geq 0$

άρα $h(x)\geq 0$ και συνεχής στο $[1.\ 2]$ ως πράξη συνεχών

$$\mathrm{E}=\int_1^2 |h(x)|dx=\int_1^2 (x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)dx=$$

$$\int_1^2 (\frac{x^2}{2}-x)'\cdot\ln(x^2-2x+2)dx=$$

$$[(\frac{x^2}{2}-x)\cdot\ln(x^2-2x+2)]_1^2-\int_1^2(\frac{x^2-2x}{2})\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx$$

$$=0-\int_1^2\frac{(x^2-2x)\cdot(x-1)}{x^2-2x+2}dx=-\int_1^2\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-2x+2}dx \text{ (εκτελούμε διαίρεση)}$$

$$=-\int_1^2(x-1)+\frac{-2x+2}{x^2-2x+2}dx$$

$$=-[\frac{x^2}{2}-x-\ln|x^2-2x+2|]_1^2$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{2\ln 2-1}{2}\tau.\mu.$$

Δ3.

i) $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$

$f'(x)\geq -1 \Rightarrow \ln(x^2-2x+2)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq 0$ ισχύει.

$\ln(x^2-2x+2)=\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$

ii)

$f(\lambda+\frac{1}{2})+2-\frac{3}{2}\geq(\lambda-1)\cdot\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2\Rightarrow$

$f(\lambda+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\geq f(\lambda)\Rightarrow$

$f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}$

Η f συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$.

Από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$

με $f'(\xi)=\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$

$f'(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα και $f'(\xi)\geq -1\Rightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}$

Δ4.

Έστω η (ε_1) η εφαπτομένη της C_g στο $(x_1,g(x_1))$ $(\varepsilon_1): y-g(x_1)=g'(x_1)\cdot(x-x_1)$.

Έστω η (ε_2) η εφαπτομένη της C_f στο $(x_2,f(x_2))$ $(\varepsilon_2): y-f(x_2)=f'(x_2)\cdot(x-x_2)$.

Για να ταυτίζονται οι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ αρκεί $g'(x_1)=f'(x_2)\Leftrightarrow -3x_1^2-1=f'(x_2)$

Ακόμα $\left.\begin{array}{l} g'(x_1)\leq -1 \\ f'(x_2)\geq -1\end{array}\right\}$ οπότε είναι ίσες μόνο όταν $g'(x_1)=-1$ και $f'(x_2)=-1$.

$g'(x_1)=-1\Leftrightarrow -3x_1^2-1=-1\Leftrightarrow x_1^2=0\Leftrightarrow x_1=0$

$f'(x_2)=-1\Leftrightarrow \ln(x_2^2-2x_2+2)+\dfrac{2(x_2-1)^2}{x_2^2-2x_2+2}-1=-1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln(x_2^2 - 2x_2 + 2) + \frac{2(x_2-1)^2}{x_2^2 - 2x_2 + 2} = 0$$

Προφανώς $x_2 = 1$ μοναδική λύση γιατί για $x_2 \neq 1$ $\ln\left((x_2-1)^2+1\right) + \dfrac{2(x_2-1)^2}{x_2^2-2x_2+2} > 0$.

Η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = -x+2$

<u>ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ</u>

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ

ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ

ΜΑΡΙΑ ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ

ΧΑΡΙΣΗ ΣΤΕΛΛΑ

ΚΑΜΜΑΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΥ ΕΛΠΙΔΑ

<u>ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑΣ</u>

ΕΛΕΝΗ ΛΙΑΚΟΥΡΑ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΡΑΛΟΣ

ΘΑΝΑΣΗΣ ΜΑΛΑΚΗΣ