Ενδεικτικές Λύσεις.

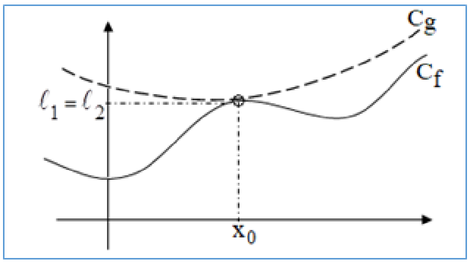
ΘΕΜΑ Α

Α1:Θεώρημα Σχολικό βιβλίο σελ:263

Α2.:Ορισμός Σχολικό βιβλίο σελ:222

Α3.Ψ. $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0

Όμως $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$



Α4. i.Λ ii.Σ iii.Σ iv.Λ v.Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.<u>1ος τρόπος</u>

Έστω ότι η f έχει 2 ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (1,3)$ με $\rho_1 < \rho_2$ και $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Αφού f π στο $[\rho_1, \rho_2]$ από ΘR, $\exists \xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (1,3) : f'(\xi) = 0$ άτοπο γιατί οι ρίζες της f' είναι το 1 και το 3.

<u>2ος τρόπος:</u> $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (1,3) \;\to\; f \uparrow$ στο $[1,3]$ άρα η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο (1,3)

Β2.

x		1		3	
f'	−	0	+	0	−
f	↘		↗		↘

$f \downarrow$ στο $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ και $f \uparrow$ στο $[1,3]$ η f έχει τ.min το $f(1) = 0$ και τ.max το $f(3) = 10$

Για το $f(1)$: $\left.\begin{array}{l} E = \int_1^3 f'(x)dx = f(3) - f(1) = 10 \\ f(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3) = 10$

Β3.

x		2	
f'	↗		↘
f	∪		∩

f κυρτή στο $(-\infty, 2]$ και κοίλη στο $[2, +\infty)$

Σ.καμπής $(2, f(2)) = (2,3)$

$f'(2) = 2$: Άρα $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - 3}{x - 2} = 2 \Leftrightarrow$

θέτω $g(x) = \dfrac{f(x) - 3}{x - 2}$, $x \neq 2 \Leftrightarrow g(x) \cdot (x - 2) + 3 = f(x)$ και $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3 = f(2)$

γιατί f συνεχής στο 2 ως πολυωνυμική. Άρα Σ.Κ: (2,3)

B4.

$$\left.\begin{array}{l} f\left((-\infty,1]\right)\overset{f\downarrow}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left[0,\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right) \\ f\left([1,3]\right)\overset{f\uparrow}{=}[0,10] \\ f\left([3,+\infty)\right)\overset{f\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),10\right] \end{array}\right\} f(\mathbb{R})=f\left((-\infty,1]\right)\cup f\left([1,3]\right)\cup f\left([3,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$$

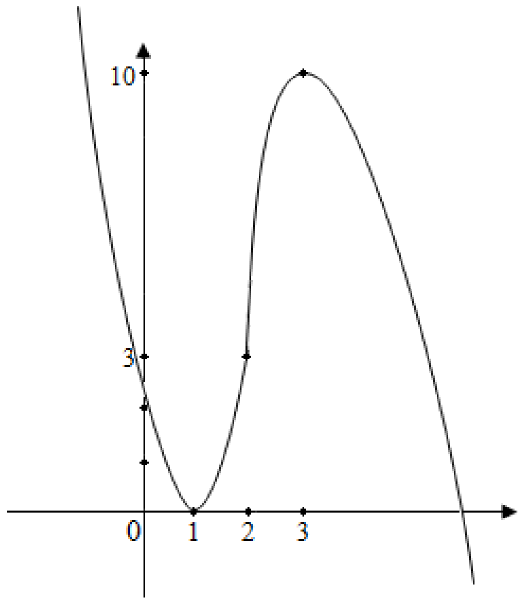
f πολυωνυμική οπότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$

και αφού $f(\mathbb{R})=f\left((-\infty,+\infty)\right)=(-\infty,+\infty)$ συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

Πίνακας μεταβολών της f:

x		1		2		3	
f''	↗		↗		↘		↘
f'	−		+		+		−
f	↘		↗		↗		↘
		τ.min f(1)=0		Σ.Κ (2,3)		τ.max f(3)=10	

Γραφική παράσταση:



$f(x)=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{αν } \alpha<0 & ,\ \text{η } f(x)=\alpha \text{ έχει μία ρίζα} \\ \text{αν } \alpha=0 & ,\ \text{η } f(x)=\alpha \text{ έχει 2 ρίζες} \\ \text{αν } 0<\alpha<10 & ,\ \text{η } f(x)=\alpha \text{ έχει 3 ρίζες} \\ \text{αν } \alpha=10 & ,\ \text{η } f(x)=\alpha \text{ έχει 2 ρίζες} \\ \text{αν } \alpha>10 & ,\ \text{η } f(x)=\alpha \text{ έχει μία ρίζα} \end{array}\right.$$

B5. Η $f'(x)$ ως παραβολή έχει τύπο της μορφής :

$f'(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\quad \alpha<0$

$f'(1)=0\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=0 \qquad (1)$

$f'(2)=2\Rightarrow 4\alpha+2\beta+\gamma=2 \qquad (2)$

$f'(3)=0\Rightarrow 9\alpha+3\beta+\gamma=0 \qquad (3)$

και $\left.\begin{array}{l}(2)-(1)\Leftrightarrow \boxed{3\alpha+\beta}=2\\ (3)-(1)\Leftrightarrow 8\alpha+2\beta=0\end{array}\right\}\overset{\cdot(-2)}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{l}-6\alpha-2\beta=-4\\ 8\alpha+2\beta=0\end{array}\right.\overset{(+)}{\Rightarrow}2\alpha=-4\Leftrightarrow\boxed{\alpha=-2}$ και $-6+\beta=2\Leftrightarrow\boxed{\beta=8}$

$(1)\Rightarrow -2+8+\gamma=0\Leftrightarrow\boxed{\gamma=-6}$

άρα

$f'(x)=-2x^2+8x-6$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-2\dfrac{x^3}{3}+8\dfrac{x^2}{2}-6x+c \\ f(1)=0 \end{array}\right\}\to-\frac{2}{3}+4-6+c=0\Leftrightarrow-\frac{2}{3}-2+c=0\Leftrightarrow c=\frac{2}{3}+2\Leftrightarrow c=\frac{8}{3}$$

άρα $\boxed{f(x)=-\dfrac{2x^3}{3}+4x^2-6x+\dfrac{8}{3}}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i. $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{\left(e^{hx}-1\right)}{h}\cdot\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\right]=2f(x)+2x(\ln x-1),\quad x>0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{hx}-1}{h}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{h\to 0}xe^{hx}=x\cdot 1=x$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\underset{u\to 0}{\overset{u=2h}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u}=f'(x)$$

Άρα η σχέση γίνεται : $x\cdot f'(x)=2f(x)+2x(\ln x-1),\quad x>0$

ii. $xf'(x)-2f(x)=2x(\ln x-1)\xrightarrow{\cdot x>0}x^2f'(x)-2xf(x)=2x^2(\ln x-1)\overset{:x^4>0}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{2\cancel{x^2}(\ln x-1)}{x^{\cancel{4}\,2}}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=\left(-\frac{2\ln x}{x}\right)'\xrightarrow{x>0}$$

$\dfrac{f(x)}{x^2}=-\dfrac{2\ln x}{x}+c$ και για x=1 : 1= c

άρα $\dfrac{f(x)}{x^2}=-\dfrac{2\ln x}{x}+1\Leftrightarrow f(x)=-2x\ln x+x^2\quad, x>0$

όμως f συνεχής στο 0 άρα f (0)= $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-2x\ln x)^{*}=0$

$$^{*}\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$$

άρα $f(x)=\begin{cases}x^2-2x\ln x\,, & x>0\\ 0\,, & x=0\end{cases}$

Γ2. Για x >0 : $f'(x)=2x-2\ln x-2x\cdot\dfrac{1}{x}=2x-2\ln x-2$

$f''(x)=2-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x-2}{x}=0\Leftrightarrow x=1$

x	0		1	
f''		−	0	+
f		∩		∪

$f''(x)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2x-2>0\Leftrightarrow x>1$

Η C_f έχει σημείο καμπής το (1, f(1))=(1,1)

Για $0<x<1\ \xrightarrow[f''<0]{f'\downarrow}\ f'(x)>f'(1)=0$ και Για $x>1\ \xrightarrow[f''>0]{f'\uparrow}\ f'(x)>f'(1)=0$

x	0		1	
f'		+	0	+
f		↗		↗

Άρα

f ↑ στα (0,1] και [1,+∞) και f συνεχής στο 1 και στο 0 →

f ↑ στο [0, +∞) άρα έχει ολικό min το f (0)=0.

Γ3.

$f\left(x^{2018}\right)+f\left(e\right)=f\left(x^{2019}\right)+f\left(e^{x}\right)$ Προφανής ρίζα x=1.

$$\text{Για } 0 \le x < 1: \left.\begin{array}{l} x^{2018} > x^{2019} \xrightarrow{f\uparrow} f(x^{2018}) > f(x^{2019}) \\ e > e^{x} \quad \xrightarrow{f\uparrow} \quad f(e) > f(e^{x}) \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)}$$

$$f(x^{2018}) + f(e) > f(x^{2019}) + f(e^{x}) \rightarrow \text{η εξίσωση είναι αδύνατη στο } [0,1)$$

$$\text{Για } x > 1: \left.\begin{array}{l} x^{2018} < x^{2019} \xrightarrow{f\uparrow} f(x^{2018}) < f(x^{2019}) \\ e < e^{x} \quad \xrightarrow{f\uparrow} \quad f(e) < f(e^{x}) \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)}$$

$$f(x^{2018}) + f(e) < f(x^{2019}) + f(e^{x}) \text{ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο } (1,+\infty)$$

Γ4. $f'(x)=\varepsilon\varphi\theta \leftrightarrow 2x-2\ln x-2=\varepsilon\varphi\theta$

Βάζω χρόνο : $2x(t)-2\ln x(t)-2=\varepsilon\varphi\theta(t)$

Παραγωγίζω: $2x'(t)\text{-}2\dfrac{x'(t)}{x(t)}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta^{2}(t)}\cdot\theta'(t)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } t=t_0 \text{ ισχύει } \theta'(t_0)\text{=- }4 \\ \text{και } x'(t)=2.\ \forall t>0 \end{array}\right\} \text{άρα: } 2x'(t_0)\text{-}2\frac{x'(t_0)}{x(t_0)}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}\theta(t_0)}\cdot\theta'(t_0) \quad (1)$$

Αφού η (ε) σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες η γωνία της (ε) με τον $x'x$ τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι $\theta(t_0)=\dfrac{\pi}{4}\text{rad}$ ή $\theta(t_0)=\dfrac{3\pi}{4}\text{rad}$

άρα $\sigma\upsilon\nu^{2}(\theta(t_0))=\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}\theta(t_0)}=2$

$$\text{Άρα} \left.\begin{array}{l} (1)\Leftrightarrow 4-\dfrac{4}{x(t_0)}=2\cdot(-4)\Leftrightarrow 4\left(1-\dfrac{1}{x(t_0)}\right)=-8\Leftrightarrow\dfrac{1}{x(t_0)}=3\Leftrightarrow x(t_0)=\dfrac{1}{3} \\ \text{και } f(\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{9}-\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{3}\ln 3 \end{array}\right\} \rightarrow M(\frac{1}{3},\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\ln 3)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Στο $\overset{\triangle}{A O \Gamma}:\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{O\Gamma}{OA}\Leftrightarrow OA=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

Στο $\overset{\triangle}{O\Delta B}:\eta\mu\theta=\dfrac{O\Delta}{OB}\Leftrightarrow OB=\dfrac{1}{\eta\mu\theta}$

άρα $AB=OA+OB=\dfrac{1}{\eta\mu\theta}+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow f(\theta)=\dfrac{1}{\eta\mu\theta}+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta},\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

ii) $f'(\theta)=-\dfrac{1}{\eta\mu^{2}\theta}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}\theta}\cdot\eta\mu\theta=\dfrac{\eta\mu^{3}\theta-\sigma\upsilon\nu^{3}\theta}{\eta\mu^{2}\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^{2}\theta}$

$f'(\theta)=0\Leftrightarrow\eta\mu^{3}\theta=\sigma\upsilon\nu^{3}\theta\Leftrightarrow\eta\mu\theta=\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{4},\quad\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f'(\theta)$ συνεχής στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα διατηρεί πρόσημο στα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}<0 \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}>0$$

Για $\theta=\frac{\pi}{4}\text{rad}$ το ΑΒ γίνεται ελάχιστο.

iii) $\lim\limits_{\theta\to0^+}\frac{1}{\eta\mu\theta}=+\infty$ γιατί $\eta\mu\theta>0\ \forall\theta>0$ κοντά στο 0 και $\lim\limits_{\theta\to0^+}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}=1$

Άρα $\lim\limits_{\theta\to0^+}f(\theta)=+\infty$, η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

και

$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}=+\infty$ γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta>0\ \forall\theta>0$ κοντά στο 0 και $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\eta\mu\theta}=1$

Άρα $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}f(\theta)=+\infty$, η $x=\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Δ2. $g(\theta)=f(\theta)+f(\pi-\theta)=\frac{1}{\eta\mu\theta}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1}{\eta\mu(\pi-\theta)}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)}=\frac{1}{\eta\mu\theta}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1}{\eta\mu\theta}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{2}{\eta\mu\theta}$

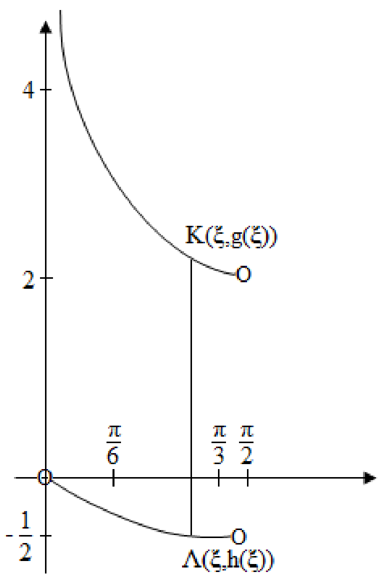
και $h(\theta)=-\frac{1}{g(\theta)}=-\frac{\eta\mu\theta}{2}$

$g'(\theta)=-\frac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta}<0\quad\forall\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to g\downarrow$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$g''(\theta)=\frac{2\eta\mu\theta\cdot\eta\mu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot2\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^4\theta}=\frac{2\eta\mu\theta\left(\eta\mu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)}{\eta\mu^4\theta}>0\ \forall\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to g$ κυρτή στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$h'(\theta)=\frac{-\sigma\upsilon\nu\theta}{2}<0\ \ \forall\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to h\downarrow$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$h''(\theta)=\frac{\eta\mu\theta}{2}>0\ \ \forall\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to h$ κυρτή στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$



$\lim\limits_{\theta\to0^+}g(\theta)=+\infty\to$ η $\theta=0$ Κ.Α της C_g, $\qquad\lim\limits_{\theta\to0^+}h(\theta)=0$

$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}g(\theta)=2,\qquad\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}h(\theta)=-\frac{1}{2}$

Δ3. Η κατακόρυφη απόσταση των C_g και C_h δίνεται από την συνάρτηση $T(\theta)=g(\theta)-h(\theta),\ \theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$

Αφού η Τ(θ) παρουσιάζει ελάχιστο στο $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ και είναι παραγωγίσιμη από θεώρημα Fermat θα ισχύει $T'(\xi)=0\Leftrightarrow g'(\xi)=h'(\xi)$ οι εφαπτόμενες των C_g και C_h στο ξ, θα είναι παράλληλες, αφού έχουν ισους συντελεστές διευθηνσης

Δ4.i) $\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)}=\frac{(A+B)x+A-B}{x^2-1}$

άρα $A+B=0$ και $A-B=2\Leftrightarrow A=-B$ και $-2B=2\Leftrightarrow B=-1$ και $A=1$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{2}{x^2-1}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\Big[\ln|x-1|-\ln|x+1|\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$\left(\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right|\right)-\left(\ln\left|\frac{1}{2}-1\right|-\ln\left|\frac{1}{2}+1\right|\right)=\left(\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\right)-\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)=$$

$$\ln\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)-\ln\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right)=\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)-\ln\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)+\ln 3=\ln\left(\frac{3(2-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}\right)$$

ii) $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}g(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{\eta\mu\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\eta\mu\theta}{\eta\mu^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\eta\mu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}d\theta$

θέτω $u=\sigma\upsilon\nu\theta,\ du=-\eta\mu\theta d\theta$

άρα

θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
u	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$I=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{1-u^2}du=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2}{u^2-1}du=-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{2}{u^2-1}du=-\ln\left(\frac{3(2-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}\right)$$ απο (i)