ΘΕΜΑ Α

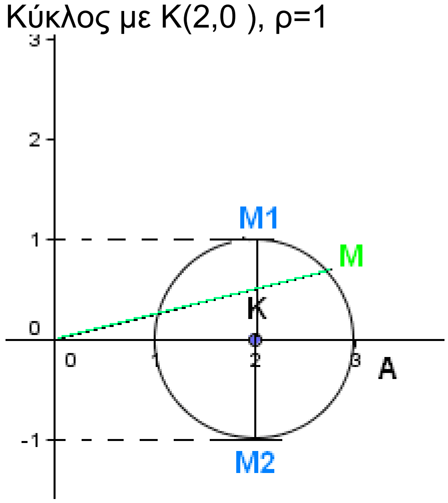
Α1. Θεωρία σελ 334-335 Σχολικού βιβλίου
Α2. Θεωρία σελ 246 Σχολικού βιβλίου
Α3. Θεωρία σελ 222 Σχολικού βιβλίου
Α4. α) Λ β)Σ γ)Σ δ)Λ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β
Β1.

$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0$

$|z-2|=-2$ απορ. ή $|z-2|=1$

Κύκλος με Κ(2,0), ρ=1



Γεωμετρικά είναι $(OM)\le(OA) \Leftrightarrow (OM)\le(OK)+\rho \Leftrightarrow |z|\le 2+1 \Leftrightarrow |z|\le 3$

Β2.

$S=z_1+z_2=-\beta$

$P=z_1\cdot z_2=\gamma$

$|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2$

Οι εικόνες των M_1, M_2 των z_1, z_2 είναι αντιδιαμετρικά άρα

$z_1=2+i$ και $z_2=2-i$

Άρα $z_1+z_2=-\beta \Leftrightarrow \beta=-4$

$z_1\cdot z_2=\gamma \Leftrightarrow \gamma=5$

Β3.

Έστω $|v| \geq 4$

$$v^3 = -a_2 v^2 - a_1 v - a_0$$

$$|v|^3 = |-a_2 v^2 - a_1 v - a_0| \leq |a_2||v^2| + |a_1||v| + |a_0| \Leftrightarrow |v|^3 \leq 3(|v|^2 + |v| + 1) \overset{|v|>1}{\Leftrightarrow}$$

$$|v|^3 (|v| - 1) \leq 3(|v|^2 + |v| + 1)(|v| - 1) \Leftrightarrow$$

$$|v|^4 - |v|^3 \leq 3(|v|^3 - 1) \Leftrightarrow |v|^4 - |v|^3 \leq 3|v|^3 - 3 \Leftrightarrow |v|^4 - 4|v|^3 + 3 \leq 0 \Leftrightarrow |v|^4 \leq 4|v|^3 - 3 \quad (1)$$

$$4|v|^3 - 3 < 4|v|^3 \quad (2)$$

(1), (2) $|v|^4 < 4|v|^3 \quad \Leftrightarrow |v| < 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f(x) \cdot f'(x) + f(x) + x \cdot f'(x) + x = x \Leftrightarrow$$

$$f(x) \cdot f'(x) + [(x)' \cdot f(x) + x \cdot f'(x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \cdot f'(x) + (x \cdot f(x))' = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x \cdot f(x))' = -f(x) \cdot f'(x) \Leftrightarrow$$

$$(x \cdot f(x))' = (-\frac{1}{2} f^2(x))' \Leftrightarrow x \cdot f(x) = -\frac{1}{2} f^2(x) + c \quad (1)$$

Επειδή f(0)=1 Από (1) έχω: $0 = -\frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$

Άρα $x \cdot f(x) = -\frac{1}{2} f^2(x) + \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot x \cdot f(x) = -f^2(x) + 1 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 2 \cdot x \cdot f(x) + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow$$

$(f(x) + x)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{1 + x^2}$ ή $f(x) + x = -\sqrt{1 + x^2}$

Αν $h(x) = f(x) + x = 0$ τότε $0 = x^2 + 1$ άτοπο

Άρα $h(x) = f(x) + x \neq 0$ και επειδή $h(0) = 1 > 0$ δεκτή λύση είναι η

$$f(x) + x = \sqrt{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Γ2.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > x$$

$x > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2$ ισχύει

$x < 0 \Leftrightarrow$ ισχύει.

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$f'<0$, f γνησίως φθίνουσα άρα 1-1

$$f(g(x))=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}g(x)=0\Leftrightarrow x^3+\frac{3x^2}{2}-1=0$$

$$g'(x)=3x^2+3x=3x(x+1)$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	0	+	
g(x)		↗		↘		↗	

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$$

$$g(-1)=-\frac{1}{2}$$

$$g(0)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

Μοναδική λύση στο (0, $+\infty$)

Γ3.

$$G(x)=\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt-f(x-\frac{\pi}{4})\cdot\varepsilon\varphi x=0$$

$$G(0)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt>0,\quad \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\quad f>0$$

$$G(\frac{\pi}{4})=-f(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=-f(0)=-1<0$$

Από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{\omega\to 0}\frac{f(1+\omega)-f(1)}{\omega}=5f'(1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\overset{\frac{0}{0}}{=}-\lim_{\omega\to 0}\frac{f(1+\omega)-f(1)}{\omega}=-f'(1)=0$$

$\text{Αρα } 5f'(1)+f'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)=0$

x	0		1		+∞
f'(x)		—	0	+	
f(x)		↘		↗	

$f(x)>1 \quad \forall x\in(0,+\infty)$

Ελάχιστο στο x=1 το $f(1)=1$

Δ2.

$g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}, x>1$

$\forall x>1 \xrightarrow{f\uparrow} f(x)>f(1)=1 \Leftrightarrow f(x)-1>0$

Άρα $g'>0$ οπότε $g\nearrow$

Θέτω $h(x)=\int_x^{x+1} g(t)dt=\int_1^{x+1} g(t)dt-\int_1^{x} g(t)dt$

$h'(x)=g(x+1)-g(x)$

$x+1>x \xrightarrow{g\nearrow} g(x+1)>g(x) \Leftrightarrow h'\nearrow$

Για -2<x<2

$8x^2+5>2x^4+5 \overset{h\nearrow}{\Longrightarrow} h(8x^2+5)>h(2x^4+5)$

Για χ>2 ή χ<-2

$8x^2+5<2x^4+5 \overset{h\nearrow}{\Longrightarrow} h(8x^2+5)<h(2x^4+5)$

Άρα οι λύσεις των ανισώσεων είναι $x\in(-2,2)$

ΘΕΜΑ Δ3

$g''(x) = -\dfrac{f'(x)(x-1)f(x)+1}{(x-1)^2}$

Απ΄το $\xrightarrow{\text{Θ.Μ.Τ f}}$ υπάρχει ξ $\xi \in (1,x)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-1}{x-1}$

Στο [1, x] $1<\xi<\chi \xrightarrow{f'} f'(1)<f'(\xi)<f'(x)$

$\dfrac{f(x)-1}{x-1} < f'(x)$

$f(x)-1 < f'(x)(x-1)$ $\xrightarrow{\text{g κυρτή}}$ $q'\uparrow$

$f')(x)(x-1) - f(x)+1 > 0$

$g'' > 0$

$(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x} \dfrac{f(t)-1}{t-1}dt = (f(a)-1)(x-a)$ x>1

$g(x) = g'(\alpha)(x-a)$

Η εφαπτομένη της C_g στο x=α είναι

$y - g(a) = g'(a)(x-a)$

$y = g'(a)(x-a) \quad (\varepsilon)$

Η g κυρτή άρα «πάνω» από την εφαπτομένη της με μοναδικό κοινό σημείο το σημείο επαφής .

Άρα $g(x) \geq (\varepsilon)$ οπότε μοναδική λύση το x=α

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ
ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ
ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ
ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ